高等数学（工本）00023 · 重点例题

共 35 题 · 每题提供「简略解答」与「详细解答」

一、填空题

1 P45

给定球面方程 $2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y+1=0$，求它的球心和半径。

- **简略解答**

配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9/2$，球心 $(1,-2,0)$，半径 $3\sqrt{2}/2$。

- **详细解答**

方程两边同除 2：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+1/2=0$。
分别配方：$(x^2-2x)=(x-1)^2-1$，$(y^2+4y)=(y+2)^2-4$。
代入得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-1-4+1/2=0$，即 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9/2$。
所以球心 $(1,-2,0)$，半径 $R=\sqrt{(9/2)}=3/\sqrt{2}=3\sqrt{2}/2\approx 2.121$。

2 P47

求 Oyz 平面上抛物线 $z=ay^2$ 和直线 $z=ay$ 分别绕 z 轴旋转生成的旋转面方程。

- **简略解答**

抛物线 → 旋转抛物面 $z=a(x^2+y^2)$；直线 → 圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$。

- **详细解答**

绕 z 轴旋转的通用做法：把曲线方程中的 y 换成 $\pm\sqrt{(x^2+y^2)}$（即 $y^2\to x^2+y^2$，$y\to\pm\sqrt{(x^2+y^2)}$）。
① $z=ay^2$ → $z=a(x^2+y^2)$，顶点在原点、开口沿 z 轴的旋转抛物面。
② $z=ay$ → $z=a\sqrt{(x^2+y^2)}$，两边平方得 $z^2=a^2(x^2+y^2)$：顶点在原点、半顶角 $\arctan(1/|a|)$ 的圆锥面。平方会引入 $z=-a\sqrt{(x^2+y^2)}$ 那一半，需注明 z 与 a 同号。

3 P60

求点 $M_0(2,1,1)$ 到平面 $x+2y-2z+1=0$ 的距离。

- **简略解答**

$d=|2+2-2+1|/3=1$。

- **详细解答**

点到平面距离公式 $d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}$。
$A=1,B=2,C=-2,D=1$，分子 $=|1\cdot2+2\cdot1+(-2)\cdot1+1|=|3|=3$，分母 $=\sqrt{(1+4+4)}=3$，故 $d=1$。

4 P63

求直线 L_1: $x/2=(y+1)/1=(z-4)/(-2)$ 与 L_2: $(x+2)/4=y/(-1)=(z-1)/(-1)$ 的夹角。

- **简略解答**

$\cos\theta=9/(3\cdot3\sqrt{2})=\sqrt{2}/2$，$\theta=\pi/4$。

- **详细解答**

$v_1=\{2,1,-2\}$，$|v_1|=\sqrt{(4+1+4)}=3$；$v_2=\{4,-1,-1\}$，$|v_2|=\sqrt{(16+1+1)}=3\sqrt{2}$。
$v_1\cdot v_2=2\cdot4+1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-1)=8-1+2=9$。
$\cos\theta=|v_1\cdot v_2|/(|v_1||v_2|)=9/(9\sqrt{2})=\sqrt{2}/2\rightarrow\theta=45°$。

5 P85

已知 $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$，求 $f(1, x/y)$。

- **简略解答**

代入化简得 $xy/(x^2+y^2)$，与原函数同形。

- **详细解答**

把第一个变量代 1、第二个变量代 x/y：
$f(1, x/y)=[1\cdot(x/y)]/[1^2+(x/y)^2]=(x/y)/[(y^2+x^2)/y^2]=(x/y)\cdot y^2/(x^2+y^2)=xy/(x^2+y^2)$。

6 P95

求函数 $z=e^{(x/y)}$ 的全微分。

- **简略解答**

$z_x=e^{(x/y)}/y$，$z_y=-(x/y^2)e^{(x/y)}$，故 $dz=e^{(x/y)}\cdot(y\,dx-x\,dy)/y^2$。

- **详细解答**

$z_x=e^{(x/y)}\cdot(1/y)$；$z_y=e^{(x/y)}\cdot(-x/y^2)$。
$dz=z_x\,dx+z_y\,dy=e^{(x/y)}[(1/y)dx-(x/y^2)dy]=e^{(x/y)}\cdot(y\,dx-x\,dy)/y^2$。
核对量纲：取 $x=2, y=3, dx=dy=0.001$，正确值 $\approx 2.16\times10^{-4}$；$z(2.001,3.001)-z(2,3)=2.164\times10^{-4}$，与公式吻合。

7 P115

求椭圆抛物面 $z=2x^2+y^2$ 在点 (1,2,6) 处的切平面方程和法线方程。

- **简略解答**

切平面 $4x+4y-z-6=0$；法线 $(x-1)/4=(y-2)/4=(z-6)/(-1)$。

- **详细解答**

令 $F=2x^2+y^2-z$，则 $F_x=4x$, $F_y=2y$, $F_z=-1$，在 (1,2,6) 处法向量 $n=(4,4,-1)$。
切平面：$4(x-1)+4(y-2)-(z-6)=0$，整理得 $4x+4y-z-6=0$。
法线：$(x-1)/4=(y-2)/4=(z-6)/(-1)$。

8 P117

求 $u=xy+yz+zx$ 在点 (1,1,2) 处沿方向角 $\alpha=60°$, $\beta=45°$, $\gamma=60°$ 的方向导数。

- **简略解答**

$(5+3\sqrt{2})/2\approx4.621$。

- **详细解答**

$\nabla u=(y+z, x+z, x+y)$，在 (1,1,2) 处为 (3,3,2)。
方向余弦：$\cos\alpha=1/2$，$\cos\beta=\sqrt{2}/2$，$\cos\gamma=1/2$（验证 $1/4+1/2+1/4=1$，合法方向）。
$\partial u/\partial l=3\cdot(1/2)+3\cdot(\sqrt{2}/2)+2\cdot(1/2)=(5+3\sqrt{2})/2\approx4.621$。

9 P135

计算 $I=\iint_D xy\,dxdy$，D 由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 围成。

- 简略解答

$I=1/24$。

- 详细解答

两曲线交于 (0,0)、(1,1)，区域为 $0\le x\le 1$，$x^2\le y\le x$。
先对 y 积分：$\int_{x^2}^{x} xy\,dy=x\cdot[y^2/2]_{x^2}^{x}=x(x^2-x^4)/2$。
$I=\frac{1}{2}\int_0^1(x^3-x^5)dx=\frac{1}{2}(1/4-1/6)=\frac{1}{2}\cdot 1/12=1/24\approx 0.0417$。

10 P142

计算 $I=\iint_D y\cdot\cos(xy)\,dxdy$，其中 ①$D=[-1,1]\times[0,1]$；②$D=[0,1]\times[-1,1]$。

- 简略解答

①$2(1-\cos 1)\approx 0.919$；②0。

- 详细解答

①先对 x 积分：$\int_{-1}^{1} y\cos(xy)dx=[\sin(xy)]_{-1}^{1}=2\sin y$（$y\neq 0$ 时），再 $I=\int_0^1 2\sin y\,dy=2(1-\cos 1)\approx 0.9194$。
②区域关于 x 轴对称，而被积函数 $y\cos(xy)$ 关于 y 是奇函数（$\cos(xy)$ 对 y 为偶），故内层 $\int_{-1}^{1} y\cos(xy)dy=0$，$I=0$。

二、选择题

1 P88

证明二重极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy/(x^2+y^2)$ 不存在。

- **简略解答**

沿 y=x 极限为 1/2，沿坐标轴为 0，路径不同 → 极限不存在。

- **详细解答**

沿 x 轴（y=0, x≠0）：$xy/(x^2+y^2)=0 \to 0$。
沿 y 轴（x=0, y≠0）：同样为 0。
沿 y=x：$xy/(x^2+y^2)=x^2/(2x^2)=1/2 \to 1/2$。
两条路径极限值不同，故二重极限不存在。

2 P29

在 x 轴上求点 P，使它与 Q(4,1,2) 的距离为 √30。

- **简略解答**

$P_1(-1,0,0)$、$P_2(9,0,0)$。

- **详细解答**

设 P(x,0,0)，则 $|PQ|^2=(x-4)^2+(0-1)^2+(0-2)^2=(x-4)^2+5=30$，得 $(x-4)^2=25$，x=9 或 x=−1。
故 $P_1(-1,0,0)$、$P_2(9,0,0)$，两解关于 Q 在 x 轴上的投影 x=4 对称。

3 P37

已知 $M_1(3,5,\sqrt{2})$、$M_2(2,6,0)$，求向量 M_1M_2 的模、方向余弦与方向角。

- **简略解答**

$M_1M_2=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$，模 2；方向余弦 $(-1/2, 1/2, -\sqrt{2}/2)$；方向角 $2\pi/3, \pi/3, 3\pi/4$。

- **详细解答**

$M_1M_2=O\,M_2-O\,M_1=(2-3, 6-5, 0-\sqrt{2})=\{-1,1,-\sqrt{2}\}$。
$|M_1M_2|=\sqrt{(1+1+2)}=2$。
方向余弦：$\cos\alpha=-1/2$，$\cos\beta=1/2$，$\cos\gamma=-\sqrt{2}/2$（平方和 $1/4+1/4+1/2=1$ ✓）。
方向角：$\alpha=2\pi/3$，$\beta=\pi/3$，$\gamma=3\pi/4$。

4 P61

求经过点 $(-1,0,2)$ 且方向向量为 $\{-1,-3,1\}$ 的直线方程。

- **简略解答**

对称式 $(x+1)/(-1)=y/(-3)=(z-2)/1$；参数式 $x=-1-t$, $y=-3t$, $z=2+t$。

- **详细解答**

点向式标准形式 $(x-x_0)/m=(y-y_0)/n=(z-z_0)/p$，代入 $x_0=-1$, $y_0=0$, $z_0=2$, $m=-1$, $n=-3$, $p=1$ 得 $(x+1)/(-1)=y/(-3)=(z-2)/1$。
令其等于 t：$x=-1-t$，$y=-3t$，$z=2+t$。

5 P78

过点 M(−5,2,−1) 且平行于 Oyz 平面的平面方程。

- **简略解答**

x+5=0（即 x=−5）。

- **详细解答**

平行于 Oyz 平面 ⇒ 法向量取 {1,0,0}（平面方程中不含 y、z）。
点法式：1·(x−(−5))+0·(y−2)+0·(z+1)=0，即 x+5=0。

6 P93

求 $z=x^3-3x^2y+y^3$ 的所有二阶偏导数。

- **简略解答**

$z_{xx}=6x-6y$，$z_{xy}=z_{yx}=-6x$，$z_{yy}=6y$。

- **详细解答**

一阶：$z_x=3x^2-6xy$，$z_y=-3x^2+3y^2$。
二阶：$z_{xx}=\partial(3x^2-6xy)/\partial x=6x-6y$；$z_{xy}=\partial(3x^2-6xy)/\partial y=-6x$；$z_{yx}=\partial(-3x^2+3y^2)/\partial x=-6x$；
$z_{yy}=\partial(-3x^2+3y^2)/\partial y=6y$。
$z_{xy}=z_{yx}$，与混合偏导连续时相等一致。

7 P100

设 $w=F(x,y,z)$，$z=\varphi(x,y)$，求复合函数 $w=F(x,y,\varphi(x,y))$ 的偏导数。

- **简略解答**

$w_x=F_x+F_z\cdot z_x$，$w_y=F_y+F_z\cdot z_y$。

- **详细解答**

固定 y 对 x 求偏导时，w 通过三条链依赖 x：第一条 x 本身，第三条 $z=\varphi(x,y)$ 也随 x 变。
故 $\partial w/\partial x=F_x(x,y,z)+F_z(x,y,z)\cdot\partial z/\partial x$，同理 $\partial w/\partial y=F_y+F_z\cdot\partial z/\partial y$，其中 $z=\varphi(x,y)$，F_x、F_z 在 $(x,y,\varphi(x,y))$ 处取值。

8 P107

求 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+x-2y$ 的极值。

- **简略解答**

唯一驻点 $(0,1)$，为极小值点，极小值 $f(0,1)=-1$。

- **详细解答**

$f_x=2x-y+1=0$，$f_y=-x+2y-2=0$。由第一式 $y=2x+1$，代入第二式：$-x+2(2x+1)-2=0\rightarrow 3x=0\rightarrow x=0,\ y=1$。
$A=f_{xx}=2$，$B=f_{xy}=-1$，$C=f_{yy}=2$，$AC-B^2=4-1=3>0$ 且 $A=2>0\Rightarrow$ 极小值点。
$f(0,1)=0-0+1+0-2=-1$。无极大值。

9 P111

表面积 96 m^2 的长方体箱子，长宽高各为多少时容积最大?

- 简略解答

正方体 4×4×4 m，最大容积 64 m^3。

- 详细解答

设棱长 x,y,z，约束 2(xy+yz+zx)=96，即 xy+yz+zx=48；目标 V=xyz。
令 L=xyz+λ(xy+yz+zx−48)，对 x,y,z 求偏导并令其为 0：yz=λ(y+z)，xz=λ(x+z)，xy=λ(x+y)。三式两两相减得 (x−y)z 型关系，推出 x=y=z。
代回：$3x^2=48 \rightarrow x=4$。故 4×4×4，V=64 m^3（由均值不等式 xy+yz+zx≥3(xyz)^{2/3} 也得同一结论）。

10 P120

求 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 的梯度为零的点。

- 简略解答

(−2,1,1)。

- 详细解答

$u_x=2x+y+3=0$，$u_y=x+4y-2=0$，$u_z=6z-6=0$。
由第三式 z=1；由前两式解线性方程组：x=2−4y 代入第一式，$2(2-4y)+y+3=0 \rightarrow 4-8y+y+3=0 \rightarrow -7y=-7 \rightarrow y=1$，x=−2。
故点为 (−2,1,1)。

11 P138

求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x=1/2$ 围成的闭区域 D 的面积。

- 简略解答

S=2/3。

- 详细解答

交点：$x=1/2$ 时 $y^2=1 \to y=\pm1$。区域写成 y 型：$-1\le y\le 1$，$y^2/2\le x\le 1/2$。

$S=\int_{-1}^{1}(1/2-y^2/2)dy=2\int_0^1(1-y^2)/2\ dy=\int_0^1(1-y^2)dy=1-1/3=2/3$。

12 P153

计算 $I=\iiint_\Omega x\,dxdydz$，$\Omega$ 由三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 围成。

- 简略解答

I=1/48。

- 详细解答

Ω：$0\le x\le 1$，$0\le y\le (1-x)/2$，$0\le z\le 1-x-2y$。

先对 z：$\int_0^{1-x-2y}dz=1-x-2y$。

再对 y：$\int_0^{(1-x)/2}(1-x-2y)dy=[(1-x)y-y^2]_0^{(1-x)/2}=(1-x)^2/2-(1-x)^2/4=(1-x)^2/4$。

最后 $I=\int_0^1 x(1-x)^2/4\ dx=\frac{1}{4}(1/2-2/3+1/4)=\frac{1}{4}\cdot 1/12=1/48$。

13 P167

求曲面 $z=9-x^2-y^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2$ 截得的那块曲面面积。

- **简略解答**

$A=13\pi/3\approx13.61$。

- **详细解答**

$z_x=-2x$，$z_y=-2y$，面积元 $\sqrt{(1+4x^2+4y^2)}\,dxdy$。
极坐标：$A=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{(1+4r^2)}\cdot r\,dr=2\pi\cdot(1/8)\cdot(2/3)[(1+4r^2)^{3/2}]_0^{\sqrt{2}}=(\pi/6)(27-1)=13\pi/3$。

14 P179-3

上半球体 Ω 与第一卦限内的 Ω_1，判断下列积分等式是否正确：$\iiint_\Omega z\,dv=4\iiint_{\Omega_1} z\,dv$。

- **简略解答**

正确。

- **详细解答**

上半球体关于 xOz 面、yOz 面都对称，被积函数 z 不含 x、y，所以在 $x\geq0$ 与 $x\leq0$ 两半、$y\geq0$ 与 $y\leq0$ 两半上的积分彼此相等，共 4 份，每份恰是第一卦限 Ω_1 上的积分。故等式成立。

15 P179-5

球体 Ω 上的三重积分，判断下列说法中错误的是：$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=0$。

- **简略解答**

该项错误，正确结论是 $I>0$。

- **详细解答**

被积函数 $x^2+y^2+z^2\geq 0$ 且在 Ω 内除原点外处处为正，Ω 体积不为 0，因此 $I>0$（若 Ω 是半径 R 的球，直接用球坐标可得 $I=4\pi R^5/5$）。所以「$I=0$」是错的，正是本题要选的那一项。

三、解答大题

1 P40

设 $|a|=3$，$|b|=5$，确定 k 使向量 $a+kb$ 与 $a-kb$ 垂直。

- **简略解答**

$k=\pm 3/5$。

- **详细解答**

垂直 ⇔ 数量积为 0：$(a+kb)\cdot(a-kb)=a\cdot a-k^2b\cdot b=|a|^2-k^2|b|^2=9-25k^2=0$。
得 $k^2=9/25$，$k=\pm 3/5$。验算 $k=3/5$：$9-25\cdot(9/25)=0$ ✓。两个符号都成立，因为 $a+kb$ 与 $a-kb$ 交换了 k 的符号仍是同一条件。

2 P52

已知两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，求其交线 C 在 Oxy、Oyz 平面上的投影曲线，以及 C 的参数方程。

- **简略解答**

Oyz 投影：$y+z=1$（$0\le y,z\le 1$）；Oxy 投影：$x^2/(1/2)+(y-1/2)^2/(1/4)=1$，$z=0$；参数方程 $x=\cos t/\sqrt{2}$，$y=(1+\sin t)/2$，$z=(1-\sin t)/2$，$t\in[0,2\pi)$。

- **详细解答**

两球面为 S_1: $x^2+y^2+z^2=1$ 与 S_2: $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$。
两式相减消去二次项：$-2y+1-2z+1=0 \to y+z=1$，这就是交线所在的平面。
①Oyz 投影：令 $x=0$，交线退化为平面 $y+z=1$ 与球面的交，$0\le y,z\le 1$，即线段 $y+z=1$（$0\le y,z\le 1$）。
②Oxy 投影：把 $z=1-y$ 代入 S_1：$x^2+y^2+(1-y)^2=1 \to x^2+2y^2-2y=0 \to x^2+2(y-1/2)^2=1/2 \to x^2/(1/2)+(y-1/2)^2/(1/4)=1$，$z=0$。
③参数化：令 $x=\cos t/\sqrt{2}$，由 $2(y-1/2)^2=1/2-x^2=\tfrac{1}{2}\sin^2 t$ 得 $y-1/2=\pm\sin t/2$，取 $y=(1+\sin t)/2$，$z=1-y=(1-\sin t)/2$。$t\in[0,2\pi)$ 时全轨迹走一遍。

3 P55

已知平面 Π 过三点 $P_1(1,1,1)$、$P_2(-2,1,2)$、$P_3(-3,3,1)$，求平面方程。

- **简略解答**

$x+2y+3z-6=0$。

- **详细解答**

$P_1P_2=(-3,0,1)$，$P_1P_3=(-4,2,0)$。
$n=P_1P_2\times P_1P_3=((0)(0)-(1)(2),\ (1)(-4)-(-3)(0),\ (-3)(2)-(0)(-4))=(-2,-4,-6)$，取 $n=(1,2,3)$。
点法式：$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0 \to x+2y+3z-6=0$。验算 P_3：$-3+6+3-6=0$ ✓。

4 P91

求 $z=x^2-3xy+y^3$ 在点 $(1,-2)$ 处的两个偏导数。

- 简略解答

$z_x(1,-2)=8$，$z_y(1,-2)=9$。

- 详细解答

$z_x=2x-3y$，在 $(1,-2)$ 处 $=2\cdot1-3\cdot(-2)=2+6=8$。
$z_y=-3x+3y^2$，在 $(1,-2)$ 处 $=-3+3\cdot4=-3+12=9$。

5 P99

复合函数 $z=e^u$，$u=x^3\sin y$，求 $\partial z/\partial x$、$\partial z/\partial y$。

- 简略解答

$\partial z/\partial x=3x^2\sin y\cdot e^{(x^3\sin y)}$，$\partial z/\partial y=x^3\cos y\cdot e^{(x^3\sin y)}$。

- 详细解答

链式法则 $\partial z/\partial x=(dz/du)(\partial u/\partial x)=e^u\cdot3x^2\sin y$；$\partial z/\partial y=(dz/du)(\partial u/\partial y)=e^u\cdot x^3\cos y$，其中 $u=x^3\sin y$。

6 P102

方程 e^(−xy)−2z+e^z=0 确定隐函数 z=f(x,y)，求两个偏导。

- **简略解答**

z_x=y e^(−xy)/(e^z−2)，z_y=x e^(−xy)/(e^z−2)。

- **详细解答**

令 F(x,y,z)=e^(−xy)−2z+e^z。
F_x=−y e^(−xy)，F_y=−x e^(−xy)，F_z=−2+e^z。
z_x=−F_x/F_z=y e^(−xy)/(e^z−2)，z_y=−F_y/F_z=x e^(−xy)/(e^z−2)。注意 e^z−2≠0 时才成立。

7 P113

求螺旋线 x=2cos θ, y=2sin θ, z=θ 在点 (2,0,2π) 处的切线与法平面方程。

- **简略解答**

切线 (x−2)/0=y/2=(z−2π)/1；法平面 2y+z−2π=0。

- **详细解答**

点 (2,0,2π) 对应 θ=0。切向量 r′(θ)=(−2sin θ, 2cos θ, 1)，θ=0 时 r′(0)=(0,2,1)。
切线：(x−2)/0=y/2=(z−2π)/1，即 x=2，y/2=z−2π。
法平面：0·(x−2)+2(y−0)+1(z−2π)=0 → 2y+z−2π=0。

8 P137

交换积分次序计算 $\iint_D xy\,dxdy$，D 由 $y^2=x$ 与 $y=x-2$ 围成。

- 简略解答

两种次序都得 45/8=5.625。

- 详细解答

交点：由 $x=y^2$ 与 $x=y+2$ 得 $y^2=y+2 \to y=-1$ 或 $y=2$，对应点 $(1,-1)$、$(4,2)$。
先对 x（y 型）：$-1\le y\le 2$，$y^2\le x\le y+2$。
$\iint xy\,dxdy=\int_{-1}^{2} y\cdot[(y+2)^2-y^4]/2\,dy=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^3+4y^2+4y-y^5)dy$。
逐项：$\int_{-1}^{2}y^3=15/4$，$\int_{-1}^{2}4y^2=12$，$\int_{-1}^{2}4y=6$，$\int_{-1}^{2}y^5=21/2=10.5$。
合计 $\tfrac{1}{2}(3.75+12+6-10.5)=\tfrac{1}{2}\cdot 11.25=45/8$。
换 x 型验证：$0\le x\le 1$ 时 $-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}$；$1\le x\le 4$ 时 $x-2\le y\le\sqrt{x}$，两部分相加同样得 45/8。

9 P146

计算 $\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy$，D 为圆域 $x^2+y^2\le R^2$。

- 简略解答

$\pi \sin R^2$。

- 详细解答

极坐标 $dxdy=r\,dr\,d\theta$：$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R \cos(r^2)\cdot r\,dr=2\pi\cdot\tfrac{1}{2}[\sin(r^2)]_0^R=\pi \sin R^2$。
验算 R=1：$I=\pi \sin 1\approx 2.644$。

10 P148

求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2-x^2-y^2$ 所围立体的体积。

- **简略解答**

$V=\pi$。

- **详细解答**

交线：$x^2+y^2=2-x^2-y^2 \to x^2+y^2=1$，交线为 $z=1$ 处的圆。

$V=\iint_{x^2+y^2\le 1}[(2-x^2-y^2)-(x^2+y^2)]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(2-2r^2)r\,dr=2\pi[r^2-r^4/2]_0^1=2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$。